

# 《数学分析III》教学大纲

课程编码: 112724

课程名称: 数学分析

学时/学分: 72 /4

先修课程: 《数学分析 I》、《数学分析 II》

适用专业: 数学与应用数学专业

开课教研室: 分析与方程教研室

## 一、课程性质与任务

1. 课程性质:《数学分析III》是数学与应用数学专业的一门重要的核心课程,它的主要内容包括级数理论、多元函数微分学理论。它是进行数学研究的理论基础,着重研究解决数学问题的基础方法及其理论。

2. 课程任务:掌握级数敛散的概念和敛散性的基本判别方法及幂级数的基本知识;初步培养敛散性的思想,为数学分析及其后继课程的学习打好必要的基础知识。开设本课程的目的是培养学生具有抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的知识分析和解决问题的能力。通过系统的学习与严格的训练,使学生全面掌握数学分析中的级数理论、多元函数微分学理论知识;提高建立数学模型并应用级数理论、多元函数微分学理论这些工具解决实际问题应用的能力。

## 二、课程教学基本要求

1. 掌握数项级数敛散性的概念,熟练运用各种判别法判别正项级数,任意项级数与无穷乘积的敛散性。

2. 掌握函数项级数(函数序列)一致收敛性概念,一致收敛性的判别法与一致收敛级数的性质。

3. 握幂级数的性质,会熟练展开函数为幂级数,了解函数的幂级数展开的重要应用。

4. 掌握周期函数的 Fourier 级数展开方法,掌握 Fourier 级数的收敛判别法与 Fourier 级数的性质,初步了解 Fourier 变换与 Fourier 积分。

5. 深刻理解偏导数,全微分的概念及几何意义;深刻理解方向导数,梯度的概念及它们之间的关系;理解连续,偏导数存在与可微之间的关系;掌握混合偏导与对变元求导顺序无关定理的条件及证明;掌握二元函数中值定理,泰勒公式及应用;熟练掌握计算多元函数偏导数,全微分,方向导数,梯度的算法,并熟悉有关算符;掌握二元函数极值的计算。

本课程的成绩考核形式:末考成绩(闭卷考查)(70%) + 平时成绩(平时测验、作业、课堂提问、课堂讨论等)(30%)。成绩评定采用百分制,60分为及格。

## 三、课程教学内容

## 第十二章 数项级数

### 1. 教学基本要求

- (1) 掌握数项级数收敛与发散的概念，理解级数和意义。
- (2) 正确区分绝对收敛，条件收敛，收敛这三个定义的不用内涵，掌握绝对收敛级数与条件收敛级数在运算性质上的差异。
- (3) 掌握收敛级数的基本性质及其证明。
- (4) 掌握柯西准则，正项级数的收敛原则，比较原则，比值判别法与根值判别法以及交错级数的莱布尼兹判别法的内容及证明。
- (5) 能熟练运用数项级数的收敛准则，比较判别法，比值判别法，根式判别法，积分判别法判定正项数的敛散性。
- (6) 能熟练运用莱布尼兹判别法判定交错级数的敛散性，并能正确估计余项。
- (7) 掌握利用阿贝尔判别法和狄利克雷判别法任意项数的敛散性的技巧。
- (8) 具有构造简单反例的能力。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握数项级数收敛与发散的概念。掌握收敛级数的基本性质，掌握柯西准则，能熟练运用数项级数的收敛准则，比较判别法，比值判别法，根式判别法，积分判别法判定正项数的敛散性。能熟练运用莱布尼兹判别法判定交错级数的敛散性，掌握利用阿贝尔判别法和狄利克雷判别法任意项数的敛散性的技巧。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是数项级数及敛散性概念，级数的基本性质，正项级数的判别法，任意项级数的判别法。教学难点是利用阿贝尔判别法和狄利克雷判别法判别任意项级数的敛散性。

### 4. 教学内容

#### 第一节 级数的收敛性

1. 级数及其敛散的定义
2. 级数收敛的柯西准则
3. 收敛级数的性质

#### 第二节 正项级数

1. 正项级数收敛性的一般判别原则
2. 比式判别法和根式判别法
3. 积分判别法

#### 第三节 一般项级数

1. 交错级数
2. 绝对收敛级数及其性质
3. 阿贝尔判别法和狄利克雷判别法

## 第十三章 函数列与函数项级数

### 1. 教学基本要求

(1) 理解收敛域, 函数列的极限函数与函数项级数的和函数的意义; 掌握函数列与函数项级数的相互转化关系。

(2) 深刻理解函数列与函数项级数的一致收敛概念的含义, 几何解释及逻辑非命题。

(3) 正确区分在一个域上点点收敛与一致收敛的差异, 了解他们之间的联系。

(4) 掌握函数列极限函数与函数项级数和函数的分析性质及其证明。

(5) 能掌握应用维尔斯特拉斯判别法判定函数项级数的一致收敛性。

(6) 掌握使用阿贝尔判别法和狄利克雷判别法判定函数项级数一致收敛性的方法。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习, 使学生掌握函数列与函数项级数的一致收敛的概念。掌握函数列极限函数与函数项级数和函数的分析性质。能应用维尔斯特拉斯判别法判定函数项级数的一致收敛性, 掌握使用阿贝尔判别法和狄利克雷判别法判定函数项级数一致收敛性的方法。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是函数列和函数项级数一致收敛的概念和其判别方法, 一致收敛函数项级数和函数列的连续、可导和可积性。教学难点是函数列和函数项级数一致收敛的判别。

### 4. 教学内容

#### 第一节 一致收敛性

1. 函数列及其一致收敛性
2. 函数项级数及其一致收敛性
3. 函数项级数的一致收敛判别法

#### 第二节 一致收敛函数列与函数项级数的性质

1. 一致收敛函数列的性质
2. 一致收敛函数项级数的性质

## 第十四章 幂级数

### 1. 教学基本要求

(1) 理解幂级数的收敛半径, 收敛区间和收敛域的概念。

(2) 掌握函数的泰勒级数的概念与展开式。

(3) 掌握阿贝尔定理及其证明。

(4) 熟练掌握求幂级数收敛半径, 收敛区间和收敛域的方法。

(5) 能熟练利用已知展开式求出函数的幂级数, 掌握幂级数的运算。

(6) 掌握幂级数的和函数的分析性质。

(7) 能利用幂级数展开式进行近似计算。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习,使学生掌握幂级数的收敛半径的概念、函数的泰勒级数的概念。掌握阿贝尔定理。熟练掌握求幂级数收敛半径,能熟练利用已知展开式求出函数的幂级数,能利用幂级数展开式进行近似计算。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是幂级数概念、幂级数的敛散性及其判定,幂级数的性质,幂级数的运算。**Taylor**级数、初等函数的幂级数展开,应用幂级数的展开式做近似计算。教学难点是初等函数的幂级数展开,应用幂级数的展开式做近似计算。

## 4. 教学内容

### 第一节 幂级数

1. 幂级数的收敛区间
2. 幂级数的性质
3. 幂级数的运算

### 第二节 函数的幂级数展开

1. 泰勒级数
2. 初等函数的幂级数展开式

## 第十五章 傅里叶级数

### 1. 教学基本要求

- (1) 掌握三角级数,三角函数系的正交性,傅里叶级数的概念。
- (2) 理解函数可展成傅里叶级数的含义。
- (3) 掌握傅里叶级数的收敛定理。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习,使学生掌握傅里叶级数的概念,掌握傅里叶级数的收敛定理,理解函数可展成傅里叶级数的含义。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是函数的**Fourier**级数展开,**Fourier**级数的分析性质;**Fourier**级数收敛性的证明。教学难点是**Fourier**级数收敛性的证明。

### 4. 教学内容

#### 第一节 傅里叶级数

1. 三角级数·正交函数系
2. 以 $2\pi$ 为周期的函数的傅里叶级数
3. 收敛定理

#### 第二节 以 $2l$ 为周期的函数的展开式

1. 以  $2l$  为周期的函数的傅里叶级数
2. 偶函数与奇函数的傅里叶级数

### 第三节 收敛定理的证明

1. 预备定理 1
2. 预备定理 2
3. 收敛定理的证明

## 第十六章 多元函数的极限与连续

### 1. 教学基本要求

- (1) 掌握平面点集的有关概念和多元函数的定义
- (2) 理解平面点集的完备性定理
- (3) 掌握重极限和累次极限的区别和关系及其求法
- (4) 掌握二元函数的连续性概念，有界闭区域上的多元连续函数的性质。

### 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习，使学生掌握平面点集的有关概念，二元函数的连续性概念。理解平面点集的完备性定理。掌握重极限和累次极限的求法。

### 3. 教学重点和难点

教学重点是重要的平面点集，平面点集的完备性定理，多元函数的定义，重极限和累次极限，多元函数的连续，有界闭区域上的多元连续函数的性质。教学难点是平面点集的完备性定理，重极限和累次极限的区别和关系，有界闭区域上多元连续函数的性质的证明。

### 4. 教学内容

#### 第一节 平面点集与多元函数

1. 平面点集、邻域、聚点
2.  $\mathbb{R}^2$  上的闭域套定理、聚点定理、有限覆盖定理
3. 多元函数的定义

#### 第二节 二元函数的极限

1. 二元函数的极限
2. 累次极限

#### 第三节 二元函数的连续性

1. 二元函数的连续性的概念
2. 有界闭域上连续函数的性质
- 3.

## 第十七章 多元函数微分学

## 1. 教学基本要求

- (1) 深刻理解偏导数,全微分的概念及几何意义。
- (2) 深刻理解方向导数,梯度的概念及它们之间的关系。
- (3) 理解连续,偏导数存在与可微之间的关系。
- (4) 掌握混合偏导与对变元求导顺序无关定理的条件及证明。
- (5) 掌握二元函数中值定理,泰勒公式及应用。
- (6) 熟练掌握计算多元函数偏导数,全微分,方向导数,梯度的算法,并熟悉有关算符。
- (7) 掌握二元函数极值的计算。
- (8) 了解“最小二乘法”。

## 2. 要求学生掌握的基本概念、理论、技能

通过本章学习,使学生掌握偏导数,全微分的概念。理解连续,偏导数存在与可微之间的关系。掌握混合偏导与对变元求导顺序无关定理、二元函数中值定理,泰勒公式及应用。熟练掌握计算多元函数偏导数,全微分,方向导数,梯度的算法,掌握二元函数极值的计算。

## 3. 教学重点和难点

教学重点是全微分、偏导数的定义及其之间的关系、可微的几何意义,复合函数的链式法则,高阶偏导数和高阶全微分。**Taylor** 公式与极值。教学难点是可微的几何意义,高阶偏导数和高阶全微分,**Taylor** 公式。

## 4. 教学内容

### 第一节 可微性

1. 可微性与全微分
2. 偏导数
3. 可微性条件
4. 可微性几何意义及应用

### 第二节 复合函数微分法

1. 复合函数的求导法则
2. 复合函数的全微分

### 第三节 方向导数与梯度

1. 方向导数的定义
2. 沿任意方向的方向导数与偏导数的关系
3. 梯度的定义

### 第四节 泰勒公式与极值问题

1. 高阶偏导数
2. 中值定理和泰勒公式
3. 极值问题

#### 四、学时分配表

章序	内容	课时	备注
十二	数项级数	12	
十三	函数列与函数项级数	12	
十四	幂级数	10	
十五	傅里叶级数	10	
十六	多元函数的极限与连续	10	
十七	多元函数微分学	18	
合计		72	

#### 五、主用教材及参考书

(一) 主用教材:

《数学分析》(第四版)上册 主编:华东师范大学数学系 出版社:高等教育出版社 出版时间:2010年。

(二) 参考书:

1. 《数学分析》(第二版) 主编:陈传璋,金福临,朱学炎,欧阳光中 出版社:高等教育出版社 出版时间:2002年。

2. 《数学分析》(第一版) 主编:陈纪修,於崇华,金路著 出版社:高等教育出版社 出版时间:2002年。

3. 《数学分析中的典型问题与方法》 主编:裴礼文 出版社:高等教育出版社 出版时间:2006年。

执笔: 雷轶菊

审定: 张秦 梁桂珍